GFS

$$\sqrt{2}$$

Wilhelm Söhne, Klasse 8b, Januar 2009

Gliederung

1. Einführung

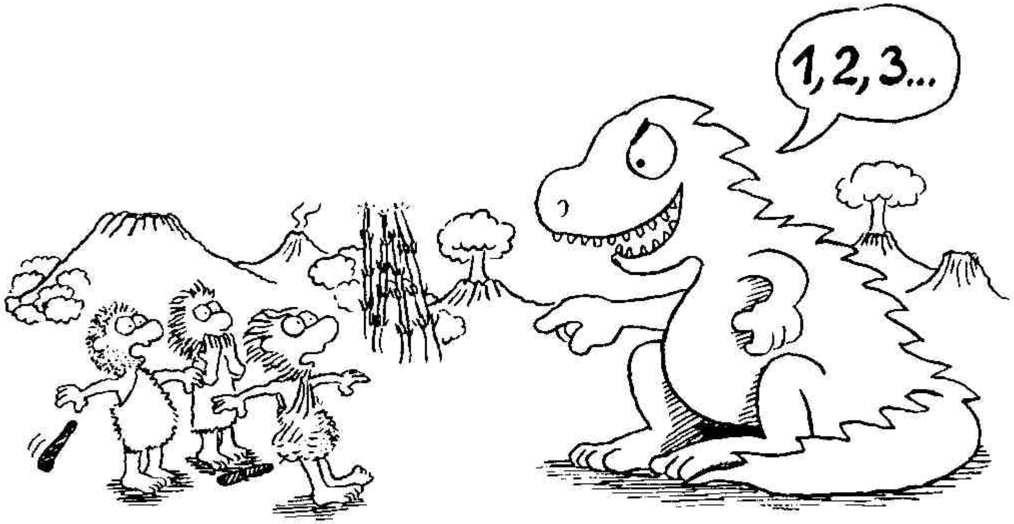
   1.1. Konstruktion

   1.2. Rechenweg

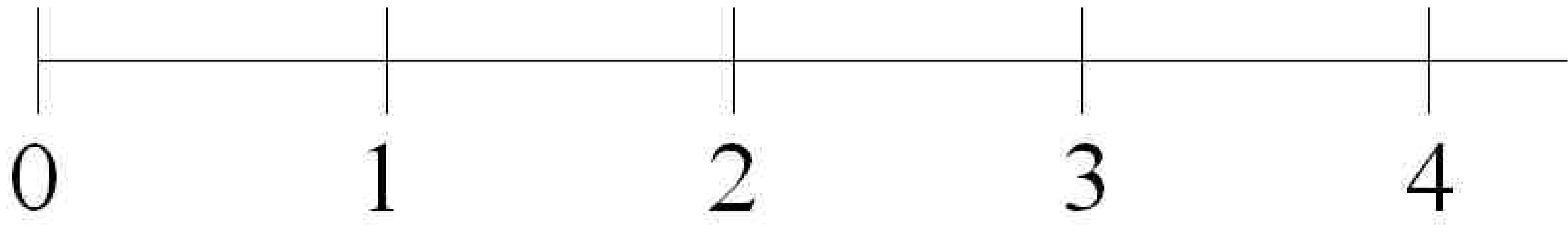
2. Erster Beweis

3. Zweiter Beweis

Einführung

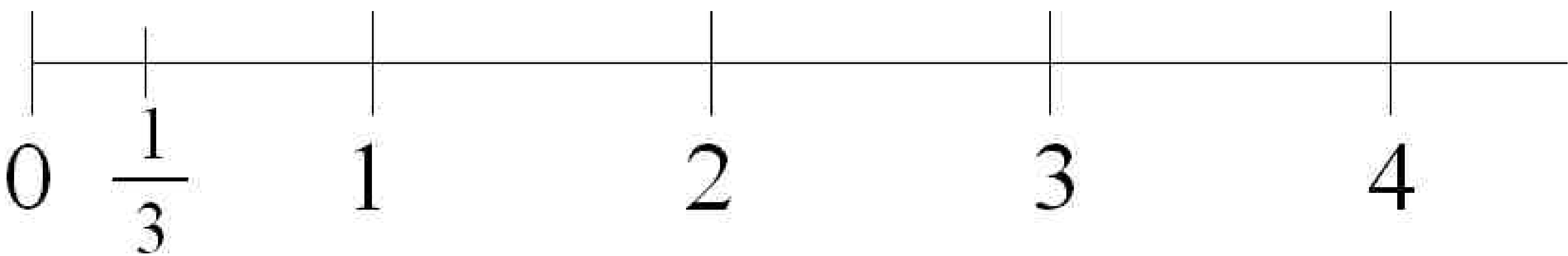


1. Am Anfang lernten die Menschen die **natürlichen Zahlen** (oder etwas was abgezählt wird), die auf einem Zahlenstrahl so dargestellt werden können:



2. Danach wurden die rationalen Zahlen gefunden.

Eine **rationale Zahl** ist eine Zahl, die als Verhältnis zweier dargestellt werden kann. z.B. 1/3



Die Zahl 1/3 ist eindeutig definiert, da man genau angeben kann, wie weit sie von der Null und der 1 entfernt ist.

Die Griechen zur Zeit des Pythagoras glaubten mit dem bisher bekannten Zahlensystem, die ganze Welt beschreiben zu können.

Das war für sie sehr wichtig, denn damit waren sie den Göttern gleich.

Pythagoras

Ihre Überzeugung wurde allerdings durch die Entdeckung von Zahlen erschüttert, für die sie keine Brüche finden konnten, mit denen sie diese Zahlen eindeutig darstellen konnten, die so genannten **irrationalen Zahlen.**

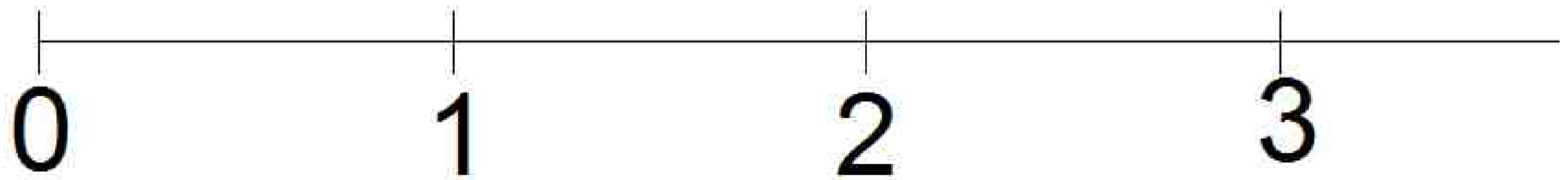
Eine dieser Zahlen war die Wurzel aus zwei.

$$\sqrt{2}$$

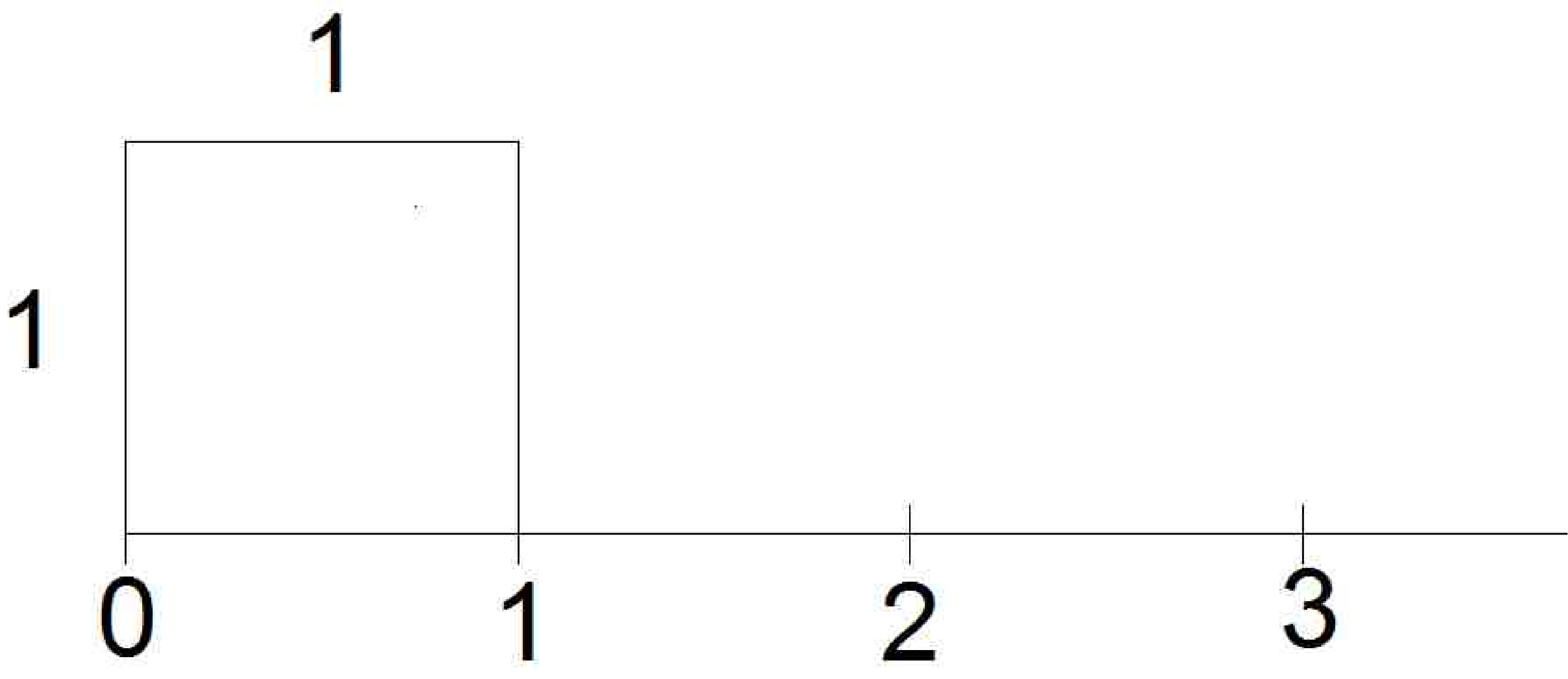
1.1.Konstruktion

Zuerst konstruierten sie die Wurzel aus zwei so:

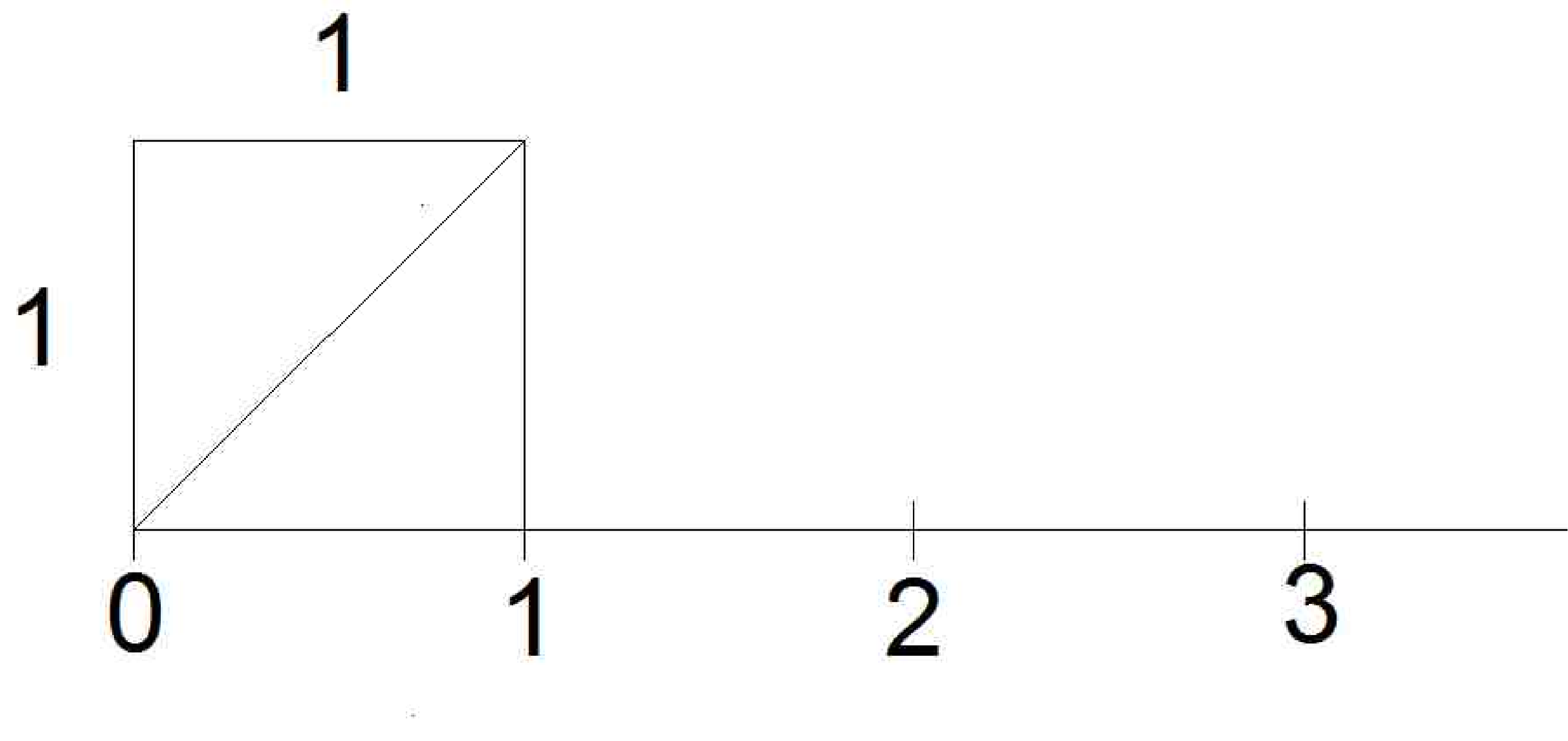
1. Sie zeichneten einen Zahlenstrahl:



2. Sie zeichneten ein Quadrat mit einer Seitenlänge 1 über der Strecke 0-1



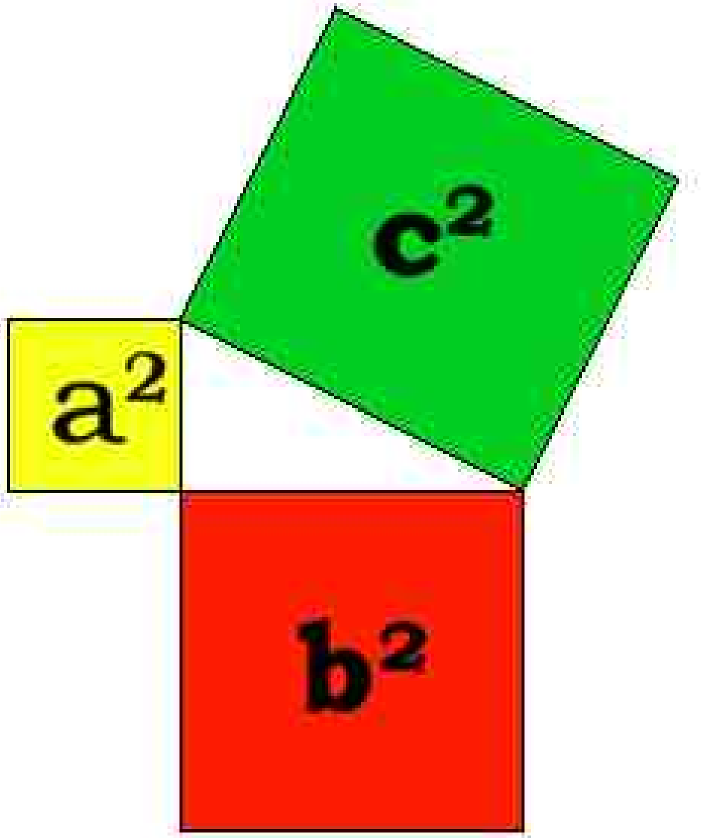
3. Danach zeichneten sie eine Diagonale ein:



Da sie wussten, dass die Diagonale nach dem Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

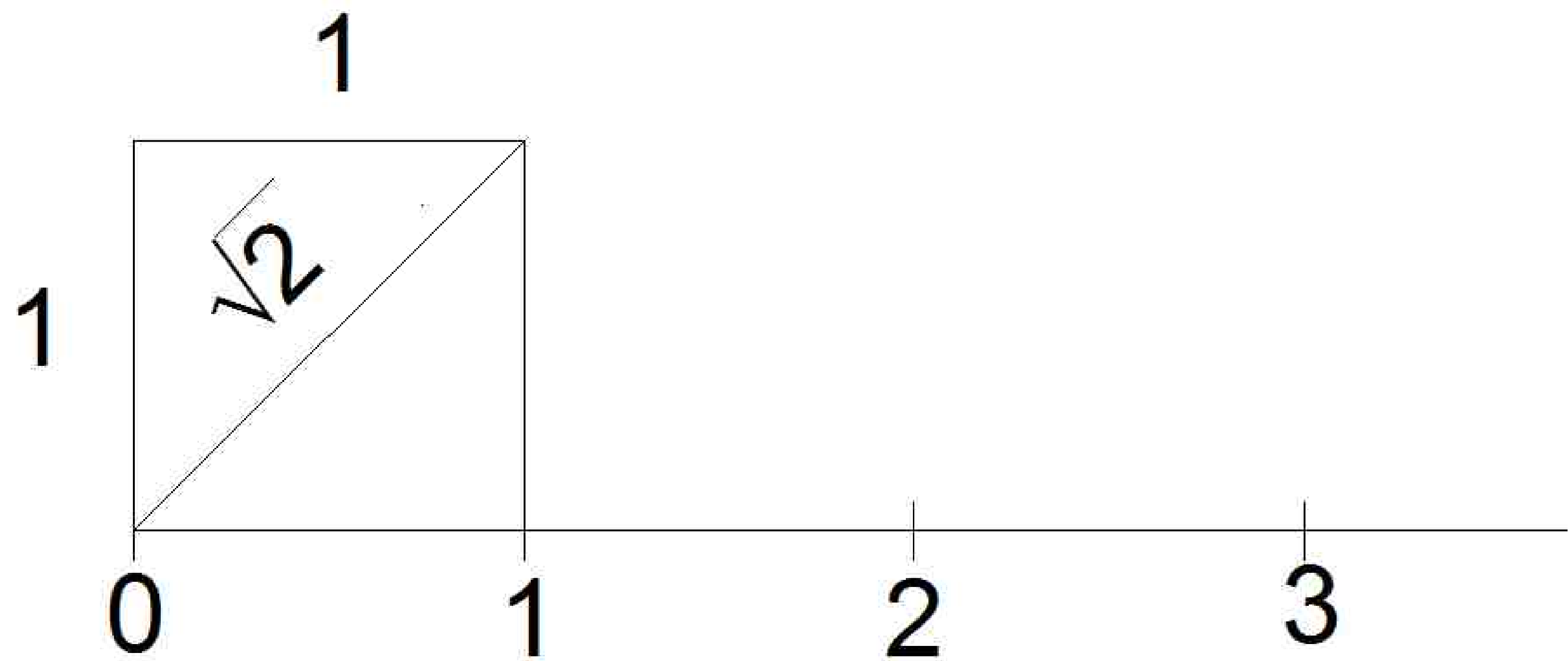
also $$\sqrt{a^2 + b^2} = c$$



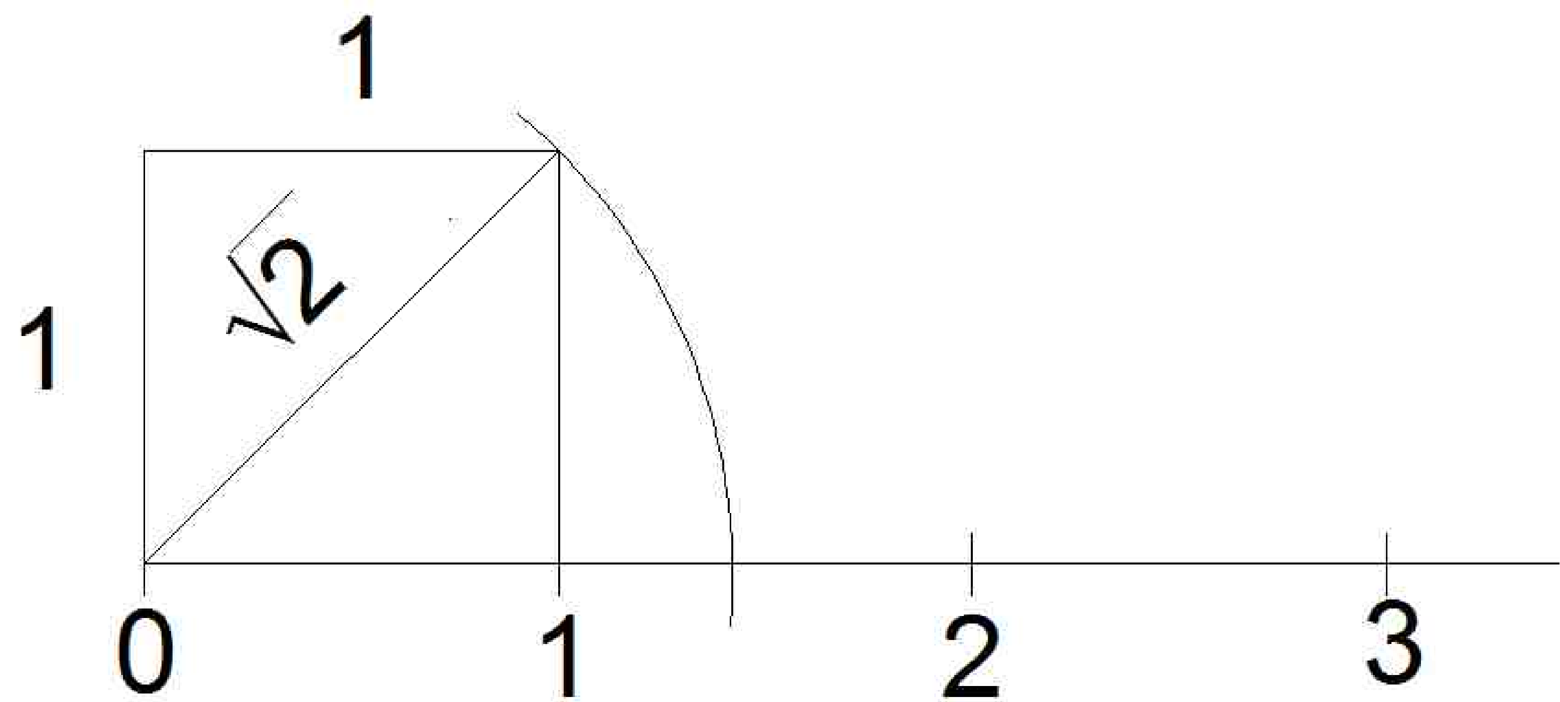
konnten sie sich ausrechnen, dass die Diagonale

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = c = \sqrt{2}$$

Sie wusste also, dass die Diagonale so lang war wie die Wurzel aus zwei.



4. Um den Abstand nun auf dem Zahlenstrahl zu haben zeichneten sie einen Bogen um 0 mit dem Radius der Diagonale. Der Abstand von 0 bis zum Schnittpunkt mit dem Bogen ist die Wurzel aus zwei.



1.2.Rechenweg

Da das Messen aber ungenau ist, wollten sie den Abstand von Null ausrechnen. Dazu gibt es verschiedene Methoden.

Ich habe das *Intervallhalbierungsverfahren* gewählt und werde es euch erstmals an Beispielen zeigen, bei denen wir das Ergebnis kennen: die Wurzel aus 4 und die Wurzel aus 64.

Die Wurzel aus 4

$$\sqrt{4}$$

untere Näherungszahl	obere Näherungszahl	Mittelwert	Mittelwert^2
0	4	2	4

=> Wurzel aus vier = Mittelwert = 2

Die Wurzel aus 64

$$\sqrt{64}$$

untere Näherungszahl	obere Näherungszahl	Mittelwert	Mittelwert^2
0	64	32	1024
0	32	16	256
0	16	8	64

=> Wurzel aus 64 = Mittelwert = 8

Jetzt zeige ich euch dasselbe bei der Wurzel aus 2

$$\sqrt{2}$$

untere Näherungszahl	obere Näherungszahl	Mittelwert	Mittelwert^2
0	2	1	1
1	2	1,5	2,25
1	1,5	1,25	1,5625
1,25	1,5	1,375	1,890625
1,375	1,5	1,4375	2,06640625
1,375	1,4375	1,40625	1,9775390625

⋮

Nach 20 weiteren Schritten sieht es so aus:

untere Näherungszahl	obere Näherungszahl	Mittelwert	Mittelwert^2
1,414213538	1,414213598	1,414213568	2,000000016

Wurzel aus 2 =
1,41421356237309504880168872420
96980785696718753769480731766797
37990732478462107038850387534327
6415727..

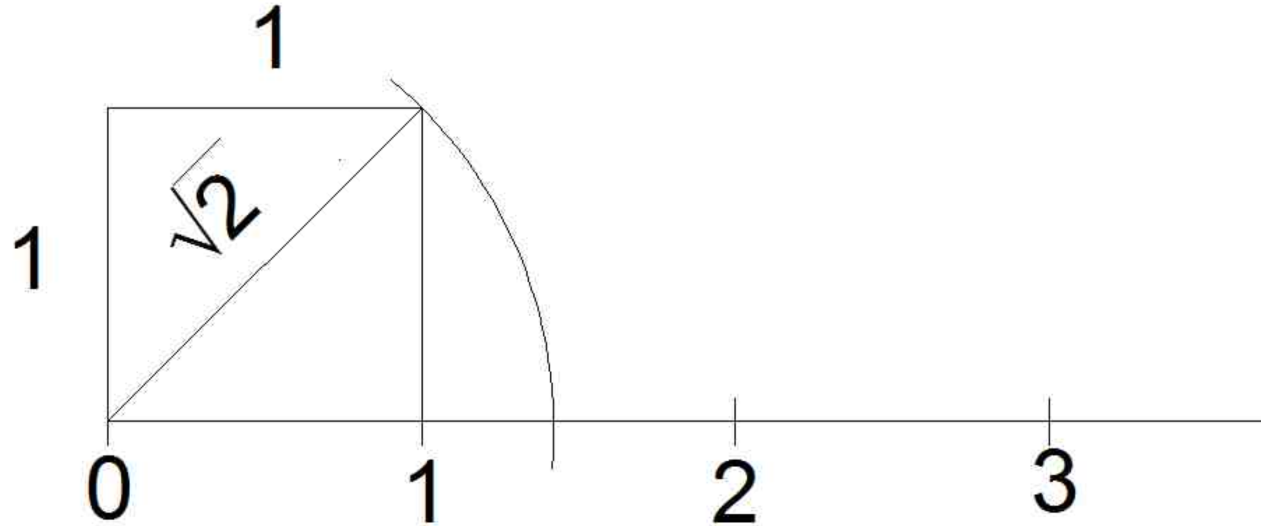
Die Griechen rechneten und rechneten also (was ohne Taschenrechner sicherlich nicht so ganz leicht war) und regelmäßig fanden sie eine weitere Nachkommastelle.

Wie lange die Griechen gerechnet haben wissen wir nicht aber irgendwann kam dann der Gedanke auf, ob diese Zahl vielleicht nie ein Ende haben wird, sozusagen eine unendliche Zahl?

Das wäre schrecklich, denn dann könnten Sie nie diese Zahl mit ihren Gedanken fassen und was noch schlimmer wäre – die Götter, die ja in die Unendlichkeit sehen können, wären klüger als sie. Was für ein fürchterlicher Gedanke !

Euklid von Alexandria bewies als Erster, dass die Wurzel aus zwei irrational ist, das heißt, dass man sie nicht als Bruch darstellen kann und wenn man sie als Dezimalzahl ausrechnen will, findet man weder Ende noch Periode.

Diesen Beweis werde ich euch jetzt erklären.



Gehen wir noch einmal einen Schritt zurück. Wurzel aus zwei ist also keine natürliche Zahl wie z.B. die Wurzel aus neun.

Den Griechen wäre aber schon weitergeholfen gewesen, wenn sie das Ergebnis als Bruch hätten darstellen können. Das würde dann so aussehen:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Euklid hat als erster bewiesen, dass es für den Bruch

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

keine Lösung gibt.

1. Beweis

(Beweis von Euklid)

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Euklid suchte einen Bruch, der mit sich selbst multipliziert 2 ergibt.

$$2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

Für die Wurzel aus 2,25 wäre dieser Bruch zum Beispiel:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = 2{,}25 \qquad \frac{3}{2} = \sqrt{2{,}25}$$

Bei den unbekannten Zahlen von der Wurzel aus zwei sieht es so aus:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2 \qquad \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2 \qquad\qquad \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Um zu beweisen das es einen solchen Bruch nicht gibt, suchte er eine oder mehrere Voraussetzungen, die ein solcher Bruch haben muss, die aber die Gleichung nicht erfüllen.

Das wäre ein eindeutiger Beweis dafür, dass der Bruch nicht existiert!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2$$

Die erste Voraussetzung war, dass a und b natürliche Zahlen sind, denn es dürfen keine nicht natürlichen Zahlen in einem Bruch stehen.

$$a, b \in N$$

Die zweite Voraussetzung war, dass a und b keinen gemeinsamen Teiler haben. Sie sind also vollständig gekürzt.

a und b haben keinen gemeinsamen Teiler mehr

Jetzt muss bewiesen werden das die Voraussetzungen nicht stimmen.

Zusammenfassung:

Gesucht:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2$$

Gegeben:

$$a, b \in N$$

a und b haben keinen gemeinsamen Teiler mehr

Jetzt formen wir ein bisschen um:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

Das ist die
Gleichung 1

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \qquad \Big| \cdot b^2$$

$$a^2 = 2 \cdot b^2 \qquad \Big| : 2$$

$$\frac{a^2}{2} = b^2$$

$$\frac{a^2}{2} = b^2$$

Weil b eine natürliche Zahl ist, muss auch b^2 eine natürliche Zahl sein.

$$\frac{a^2}{2} \in N$$

Also ist die Hälfte von a^2 eine natürliche Zahl.

a^2 = gerade Zahl

Da nur die Hälften von geraden Zahlen natürliche Zahlen sind (4/2 = natürliche Zahl | 9/2 = rationale Zahl) muss a^2 eine gerade Zahl sein.

a =gerade Zahl

Wenn a^2 gerade ist, ist auch a gerade, weil nur gerade Zahlen mit sich selbst multipliziert wieder gerade Zahlen ergeben!

Da a eine gerade Zahl ist kann man sie also durch 2 teilen oder man kann auch schreiben:

$$\frac{a}{2} = c \quad \in \mathbb{N}$$

Nach Umformung gilt also a = 2c

Dann ersetzte Euklid in der Gleichung 1 a durch 2c

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \qquad \frac{(2c)^2}{b^2} = 2$$

$$\frac{(2c)^2}{b^2} = 2$$

Jetzt löste er die Klammer auf:

$$\frac{4c^2}{b^2} = 2$$

Dann formte er weiter um:

$$\frac{4c^2}{b^2} = 2 \quad \Big| :2$$

$$\frac{2c^2}{b^2} = 1 \quad \Big| \cdot b^2$$

$$2c^2 = b^2$$

$$2c^2 = b^2 \qquad \Big| : c^2$$

$$2 = \frac{b^2}{c^2}$$

Diese Gleichung nennen wir jetzt um später den Beweis besser verstehen zu können **Gleichung 2.**

Gleichung 2: $$2 = \frac{b^2}{c^2}$$

Man sieht sofort, dass sie die gleiche Form hat wie die

Gleichung 1: $$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Daraus kann man dann schlussfolgern, dass b^2 in Gleichung 2 ebenfalls eine gerade Zahl sein muss.

$$2 = \frac{b^2}{c^2}$$

b^2 und b sind also gerade Zahlen. Deswegen kann man b durch 2d ersetzen.

$$b = 2d$$

Gleichung X:

ausgeblendet

$$\frac{b^2}{c^2} = 2 \qquad | \cdot c^2$$

$$b^2 = 2 \cdot c^2 \qquad | :2$$

$$\frac{b^2}{2} = c^2$$

Hier sieht man, dass b auch gerade ist. Er ersetzte b also in der Gleichung X durch 2d.

Gleichung 2

$$2 = \frac{b^2}{c^2}$$

und

$$b = 2d$$

also:

$$\frac{(2d)^2}{c^2} = 2$$

Dann löste Euklid wieder die Klammern auf:

$$\frac{4d^2}{c^2} = 2$$

Dann formte er wieder ein bisschen um:

$$\frac{4d^2}{c^2} = 2 \qquad \Big| :2$$

$$\frac{2d^2}{c^2} = 1 \qquad \Big| \cdot c^2$$

$$2d^2 = c^2$$

$$2d^2 = c^2 \qquad | : d^2$$

$$2 = \frac{c^2}{d^2} \qquad | \sqrt{}$$

$$\frac{c}{d} = \sqrt{2}$$

Hier verglich er diese Gleichung mit der ersten:

erste Gleichung	zweite Gleichung
$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$	$\frac{c}{d} = \sqrt{2}$

Man erkennt, dass sowohl der Bruch a/b als auch der Bruch c/d die Wurzel aus zwei ist. Allerdings ist c die Hälfte von a, und d ist die Hälfte von b. Damit ist der erste Bruch mit 2 gekürzt worden.

Da dies verboten war (Voraussetzung 2) existiert so ein Bruch nicht!

Weitere Überlegung:

Man könnte ja die Gleichung $\frac{c}{d} = \sqrt{2}$

genauso wie den ersten Bruch kürzen, indem man für die Hälfte von c die Variable e und für die Hälfte von d die Variable f einsetzt.

Das könnte so ewig weitergehen!

Da es aber keine Zahl gibt, die man ewig ohne Rest durch 2 teilen kann gibt es auch keinen Bruch, den man ewig durch 2 kürzen kann!

Euklid hat also bewiesen, dass die Gleichung 1 ewig durch zwei kürzbar ist. D. h. der Bruch und damit die Wurzel aus zwei sind nicht als rationale Zahl darstellbar!

Solche Zahlen, die man nicht mit einem Bruch darstellen kann nennt man **irrationale Zahlen**!

Wurzel aus zwei ist also eine irrationale Zahl!

Quod erat demonstrandum

(was zu beweisen war)

2. Beweis

Jetzt zeige ich euch einen anderen Beweis.

Auch hier müssen wir erstmal ein bisschen umformen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \qquad \Big| \cdot b^2$$

$$a^2 = 2 \cdot b^2$$

$$a^2 = 2 \cdot b^2$$

Wenn man eine natürliche Zahl quadriert, findet sich auf der Einerstelle des Quadrates immer dieselbe Ziffer, als hätte man nur die Einerstelle der Zahl quadriert.

Dazu zeige ich euch jetzt einige Beispiele:

Quadrat der Zahl	**Quadrat der Einerstelle**
$23^2 = 52\mathbf{9}$	$3^2 = \mathbf{9}$
$100^2 = 1000\mathbf{0}$	$0^2 = \mathbf{0}$
$177712^2 = 3158155494\mathbf{4}$	$2^2 = \mathbf{4}$
$654321^2 = 42813597104\mathbf{1}$	$1^2 = \mathbf{1}$

Einerstelle von b	Einerstelle von b²	Einerstelle der (Einerstelle von b² mal 2)	Einerstelle einer Quadratzahl?
0	0	0	ja
1	1	2	nein
2	4	8	nein
3	9	8	nein
4	6	2	nein
5	5	0	ja
6	6	2	nein
7	9	8	nein
8	4	8	nein
9	1	2	nein

$$a^2 = 2 \cdot b^2$$

Deswegen gibt es für b nur zwei Möglichkeiten: entweder ist die Einerstelle 0 oder 5

a² kann als Einerstelle nur eine Null haben, denn das Doppelte der möglichen Quadratzahlen von b hat immer eine Null. a hat als Einerstelle also eine Null.

Zusammenfassung:

b hat als Einerstelle eine Null oder eine Fünf
a hat als Einerstelle eine Null

Also kann der Bruch a/b mit fünf gekürzt werden.

Schlussfolgerung:

Es ist aber Voraussetzung, dass der Bruch vollständig gekürzt ist. Dann entsteht sofort ein Widerspruch zur Tatsache, dass sowohl a als auch b durch 5 teilbar sein müssen.

Das ist wieder ein Beweis dafür, dass kein Bruch existiert dessen Quadrat zwei ist !

Quod erat demonstrandum

(was zu beweisen war)


Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit !
www.wilhelm-nathan.de